Riassunto. Viene annunciato un risultato negativo relativo ad una congettura sulle proprieta' di simmetria uno-dimensionale per una equazione semilinear sul gruppo di Hiesenberg.

Summary. Symmetry properties of solutions to semi-linear elliptic equations have been widely studied in the last decades. In this contest, a long standing conjecture by De Giorgi states that any global solution to the Ginzburg-Landau equation

$$\Delta u + u(1 - u^2) = 0 \ in \ ^N \ (N \leq 8)$$

satisfying $-1 \leq u \leq 1$ and $\partial u \partial x_N > 0$ is constant along hyperplanes. Recently this conjecture was proved to be true by Ghoussoub and Guy for $N = 2$ and by Ambrosio and Cabré for $N = 3$. It is still an open question for $N > 3$. Under the further hypothesis that the solution u satisfies

$$\lim_{x_3 \to \pm\infty} u(x', x_3) = \pm 1 \ \ \forall x' \in^2$$

uniformly in x', the conjecture was known as Gibbons conjecture and it has been proved for all dimensions independently by Barlow- Bass- Guy, Berestycki- Hamel , Monneau and Farina . Birindelli and Prajapat proved that Gibbons conjecture holds true in the Heisenberg group in the direction ortogonal to the center. The aim of this paper is to announce that, with respect to the direction of the center of the group, the stronger De Giorgi conjecture is not true.

Una risposta negativa a un problema di simmetria unidimensionale nel gruppo di Heisenberg

E. Lanconelli*

(Risultati ottenuti in collaborazione con I.Birindelli)

1 Introduzione e risultati principali

Le proprietà di simmetria delle soluzioni di equazioni ellittiche semilineari sono state ampiamente indagate negli ultimi decenni. In questo contesto di ricerche, uno dei problemi piú studiati è il seguente, posto da De Giorgi nel 1978 ([9]).

(P). Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ una soluzione dell'equazione

$$\Delta u + u(1-u^2) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

tale che

$$|u| < 1, \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_N} > 0 \tag{1.2}$$

Allora: è vero che gli insiemi di livello $\{u = \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sono degli iperpiani, almeno per $N \leq 8$?

Questo problema é stato recentemente risolto da Ghoussoub e Guy per $N = 2$ ([11]) e da Ambrosio e Cabré per $N = 3$ ([1]). Esso è ancora aperto per $N > 3$. Alcune risposte parziali sono tuttavia presenti da tempo in

*Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta San Donato 5, I 40126 Bologna; e-mail: lanconel@dm.unibo.it

letteratura. Nel 1985, Modica ([12]) dimostró che ogni soluzione limitata di (1.1) verifica la disuguaglianza

$$\frac{1}{2}|\nabla u| \leq F(u),$$

dove $F(s) = \frac{1}{4}(1-s^2)^2$ é la primitiva nulla nel punto $s = 1$ di $f(s) = s^3 - s$. Caffarelli, Garofalo e Segala nel 1994 ([8]) hanno dimostrato che gli insiemi di livello delle soluzioni limitate di (1.1) sono iperpiani, in qualunque dimensione spaziale, se nella disuguaglianza precedente vale il segno di uguaglianza in almeno un punto.

Nella ipotesi che la soluzione u di (1.1) verifichi la prima delle (1.2) e che inoltre

$$\lim_{x_N \to \pm\infty} u(x', x_N) = \pm 1 \quad \text{uniformemente per } x' \in R^N$$

l'affermazione che u é costante lungo iperpiani é nota come *congettura di Gibbons* ed è stata risolta, in ogni dimensione spaziale, da Barlow, Bass, Guy in [2], da Berestycki, Hamel , Monneau in [3] e da Farina in [10].

In anni recenti le proprietá di simmetria delle soluzioni di equazioni semilineari sono state studiate nel contesto più generale dei gruppi di Carnot, dato l'interesse crescente di questi gruppi in vari ambiti teorici e applicativi.

In [6] Birindelli e Prajapat hanno studiato la congettura di Gibbons per l'equazione

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u + f(u) = 0 \text{ in } \mathbb{H}^n, \tag{1.3}$$

dove $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ denota il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ e $f(u)$ é un termine non lineare verificante alcune condizioni di carattere generale, che includono $f(u) = u(1-u^2)$ come caso particolare. Essi hanno provato che la congettura é vera per tutte le direzioni ortogonali al centro di $\mathbb{H}^n$.[1]

Come indicato in [6], rimaneva aperto il problema della simmetria unidimensionale nella direzione restante.

Lo scopo di questo seminario é quello di annunciare una *risposta negativa* a quest'ultimo problema, conseguenza di un teorema di esistenza che enunceremo fra poco, dopo avere richiamato alcuni fatti essenziali sul gruppo di Heisenberg e sul suo Laplaciano intrinseco.

[1] Molto recentemente, in [4], il risultato di [6] è stato esteso a tutti i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot.

Ricordiamo anzitutto che $\mathbb{H}^n$ é il gruppo di Lie su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, $n \in N$, con l'operazione di composizione interna $\circ$ data da

$$\xi_o \circ \xi = (z + z_o, t + t_o + 2\mathrm{Im}(z \cdot z_o)). \tag{1.4}$$

Abbiamo denotato con "$\cdot$" l'usuale prodotto interno hermitiano in $\mathbb{C}^n$. Qui, e nel seguito, identifichiamo $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ e,$z = x + iy$, per indicare il punto di $\mathbb{H}^n$, useremo le notazioni equivalenti $\xi = (z, t) = (x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con $z := (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$.

L'algebra di Lie di $\mathbb{H}^n$ è generata dai campi vettoriali

$$X_i = \tfrac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \tfrac{\partial}{\partial t}, \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$Y_i = \tfrac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \tfrac{\partial}{\partial t}, \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Il Laplaciano intrinseco di $\mathbb{H}^n$, chiamato anche Laplaciano di Kohn, é cosí definito

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 + Y_i^2).$$

Rispetto al gruppo di dilatazioni $\delta_\lambda \xi = (\lambda z, \lambda^2 t)$, $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ é omogeneo di grado due, nel senso seguente:

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} \circ \delta_\lambda = \lambda^2 \delta_\lambda \circ \Delta_{\mathbb{H}^n}.$$

Il teorema di esistenza precedentemente annunciato, é il seguente.

Teorema 1.1 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente Lipschitziana con le seguenti proprietà:*

(H1) f é dispari,

(H2) $f > 0$ in $]0, 1[$, $f(0) = f(1) = 0$,

(H3) $\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = l > 0$.

Allora esiste una soluzione u dell'equazione:

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u + f(u) = 0 \quad in \quad \mathbb{R}^{2n+1} \tag{1.5}$$

tale che $|u| < 1$, $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ e

$$\lim_{t \to \pm\infty} u(z, t) = \pm 1.$$

Inoltre u é di classe C^∞ se f é C^∞.

Dal Teorema 1.1 si deduce immediatamente il Corollario seguente.

Corollario 1.1 *La congettura di De Giorgi nella direzione t non é vera in $\mathbb{H}^n$.*

Dimostrazione. La funzione $f(s) = s(1-s^2)$ soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 1.1, quindi esiste una funzione u di classe C^∞ tale che

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} u + u(1-u^2) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{2n+1}, \\ -1 < u < 1, \ \frac{\partial u}{\partial t} > 0, \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} u(z,t) = \pm 1. \end{cases}$$

Allora, se la congettura di De Giorgi fosse vera nella direzione t, dovrebbero esistere $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\nu > 0$ tali che $u(z,t) = U(\alpha \cdot z + t\nu)$ per qualche funzione $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Inoltre U dovrebbe soddisfare

$$\left(|\alpha|^2 - 4\nu(J\alpha \cdot z) + 4r^2\nu^2\right) U'' = U(U^2 - 1)$$

dove J é la classica matrice simplettica $2n \times 2n$. Questo é assurdo perché il secondo membro é costante lungo gli iperpiani $\alpha \cdot z + t\nu = c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, mentre il primo membro non lo è.

2 Traccia della dimostrazione del Teorema 1.1.

Per ogni $R > 0$ indichiamo con D_R e con D_R^+, rispettivamente, i cilindri:

$$D_R = \{(z,t) \in \mathbb{R}^{2n+1};\ |z| < R,\ |t| < R^2\}$$

e

$$D_R^+ = \{(z,t) \in \mathbb{R}^{2n+1};\ |z| < R,\ 0 < t < R^2\}.$$

Sia $\psi(t) = \frac{t}{R^2}$.

Scomponiamo la dimostrazione in cinque parti, e supponiamo per semplicitá che la funzione f sia di classe $\mathbb{C}^\infty$.

Prima parte. Dimostriamo, in questa prima parte, che il problema di Dirichlet semilineare

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} u = -f(u) \quad \text{in} \quad D_R^+, \\ u(z,t) = \psi(t), \quad \text{su} \quad \partial D_R^+, \end{cases} \tag{2.6}$$

ha una soluzione $u \in \mathbb{C}^\infty(D_R^+) \cap \mathbb{C}^\alpha(\overline{D_R^+})$ per un opportuno $\alpha \in (0,1)$. Inoltre u é cilindricamente simmetrica , $0 \leq u \leq 1$ e, per ogni R sufficientemente grande,

$$u \geq v_o,$$

essendo $v_o \geq 0$, $v_o \not\equiv 0$, una funzione indipendente da R.

Sia $M \in \mathbb{R}^+$ la costante di Lipschitz di f in $[0,1]$ e definiamo

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(s) = f(s) + Ms.$$

Sia $\mathcal{T}$ l'operatore definito, per $v \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{D_R^+})$, da $\mathcal{T}(v) = u$, dove u é l'unica soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} u - Mu = -g(v) & \text{in } D_R^+, \\ u = \psi, & \text{on } \partial D_R^+. \end{cases} \tag{2.7}$$

L'operatore $\mathcal{T}$ ha le seguenti proprietá

(P1) Esiste $\alpha \in (0,1)$ tale che $\mathcal{T}$ é ben definito e $\mathcal{T}(v) \in C^\infty(D_R^+) \cap \mathbb{C}^\alpha(\overline{D_R^+})$.
Questa affermazione si dimostra con argomenti standard.

(P2) $\mathcal{T}(v)$ é cilindricamente simmetrica se v é cilindricamente simmetrica. Chiamiamo *cilindricamente simmetrica* una funzione u tale che $u(0,t) = U(r,t)$ con $r = |z|$. Questo si dimostra con un argomento basato sull'invarianza per rotazioni del problema (2.7) e sulla sua univoca risolubilitá.

(P3) $\mathcal{T}$ é monotono. Piú precisamente, se $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, allora $\mathcal{T}v_1 \leq \mathcal{T}v_2$.
Anche questa affermazione segue dal principio del massimo e dal fatto che, per la scelta di M, la funzione g è monotona su [0,1].

(P4) Se $0 \leq v \leq 1$ allora $0 \leq \mathcal{T}(v) \leq 1$.
Infatti, poiché $g(0) = 0$, $g(1) = M$ e $0 \leq \psi \leq 1$ su ∂D_R^+, ancora per il principio del massimo si ottiene $\mathcal{T}(1) \leq 1$ e $\mathcal{T}(0) \geq 0$. L'affermazione segue allora da (P3).

Costruiamo ora una funzione $v_o \geq 0$ che utilizzeremo come sottosoluzione. Sia λ_o il primo autovalore di $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ in $D_{R_0}^+$ e sia $\phi_o > 0$ la corrispondente autofunzione normalizzata da $\sup \phi_o = 1$.

Fissiamo R_o tale che
$$\lambda_o \leq \frac{l}{2}$$
dove l é il limite della condizione (H3). Allora esiste $\varepsilon \in (0,1)$, tale che
$$\lambda_o \varepsilon \phi_o \leq f(\varepsilon \phi_o).$$

Per l'unicitá dell'autofunzione normalizzata, ragionando come in (P2) si dimostra che ϕ_o é cilindricamente simmetrica.

D'ora in avanti supponiamo $R > R_o$ e definiamo
$$v_o = \begin{cases} \varepsilon \phi_o & \text{in } D^+_{R_o} \\ 0 & \text{in } D^+_R \setminus D^+_{R_o}. \end{cases}$$

Con argomenti standard si dimostra che v_o é holderiana in $\mathbb{R}^{2n+1}$ e che, di conseguenza, $\mathcal{T}(v_o)$ é ben definito. Inoltre, essendo $0 \leq v_o \leq 1$ da (P4) si ottiene $0 \leq \mathcal{T}(v_o) \leq 1$. Dimostriamo che $v_o \leq u_o := \mathcal{T}(v_o)$. Chiaramente la disuguaglianza vale in $D^+_{R_o}$ quindi basta dimostrarla in $D^+_{R_o}$. Si ha
$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^n} u_o - M u_o &= -g(v_o) = -g(\varepsilon\phi_o) \leq -(M + \lambda_o)(\varepsilon\phi_o) \\ &= -M\varepsilon\phi_o + \Delta_{\mathbb{H}^n} \varepsilon\phi_o = -M v_o + \Delta_{\mathbb{H}^n} v_o, \end{aligned}$$
onde
$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n}(u_o - v_o) - M(u_o - v_o) \leq 0 & \text{in } D^+_{R_o} \\ u_o \geq v_o & \text{on } \partial D^+_{R_o}. \end{cases}$$
Allora, per il principio del massimo, $u_o \geq v_o$ in $D^+_{R_o}$.

Costruiamo ora la successione di funzioni
$$v_k = \mathcal{T}^k(v_o), k \in \mathbb{N}.$$

Tutte le v_k sono cilindricamente simmetriche e
$$1 \geq \mathcal{T}^k(v_o) \geq \mathcal{T}(v_o) \geq v_o \geq 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Sia u il limite puntuale di (v_k). Allora u é cilindricamente simmetrica e $v_o \leq u \leq 1$. Ancora con argomenti standard, basati su note stime a priori, si riconosce inoltre che u é holderiana sulla chiusura del cilindro, di classe $\mathbb{C}^\infty$ all'interno e verifica
$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u + f(u) = 0 \text{ in } D^+_R. \tag{2.8}$$

Si riconosce infine che u assume il dato ψ sul bordo. Quindi u é la funzione cercata.

Seconda parte La funzione costruita nella prima parte verifica $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.

Questa affermazione si dimostra utilizzando un Teorema di Birindelli e Prajapat sulle proprietà di monotonia delle soluzioni di equazioni semilineari sui gruppi di Carnot ([7]).

Terza parte Estendiamo a D_R la precedente funzione u ponendo

$$v(z,t) = \begin{cases} u(z,t) & \text{for } t \geq 0 \\ -u(z,-t) & \text{for } t \leq 0. \end{cases}$$

Ovviamente v é cilindricamente simmetrica, $-1 \leq v \leq 1$, $v \geq v_o$ in D_R^+, e $v = \psi$ su ∂D_R. Inoltre, poiché per il Laplaciano di Kohn vale il principio di riflessione di Schwarz nell'ambito delle funzioni a simmetria cilindrica, si riconosce che

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} v + f(v) = 0 \text{ in } D_R. \tag{2.9}$$

Denotiamo con $u_R(z,t) = v(z,t)$ la funzione appena costruita.

Quarta parte. *Construzione di una soluzione globale.*

Poichè le funzioni u_R sono equilimitate e risolvono (2.9) in D_R, anche le funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n} u_R$ sono equilimitate. Ciò consente di affermare che, almeno per una opportuna successione R, u_R converge a una soluzione debole u di

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u + f(u) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^{2n+1}. \tag{2.10}$$

Inoltre

1)u cilindricamente simmetrica,

2) $-1 \leq u \leq 1$,

3) $u(z,t) = -u(z,-t)$,

4) per $t \geq 0$, $u(z,t) \geq v_o(z,t)$,

5) $t \mapsto u(z,t)$ é monotona crescente.

6)u é di classe C^∞.

Dalla proprietà 5) si ricava $\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$ e quindi, poiché $\frac{\partial}{\partial t}$ commuta con $\Delta_{\mathbb{H}^n}$, per il principio del massimo forte risulta $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ oppure $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$. Ma, per 3) e 4) questa seconda eventualità non puó verificarsi. Quindi $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.

Ultima parte. Proviamo che

$$\lim_{t \to \pm\infty} u(z,t) = \pm 1.$$

Consideriamo solo il limite a $+\infty$ poichè l'altro segue dalla simmetria di u rispetto a t. Poniamo $u_o(z) := \lim_{t\to+\infty} u(z,t)$. Poiché u è limitata e strettamente monotona in t il limite è ben definito e $0 < u_o(z) \leq 1$. Proviamo che $u_o(z) \equiv 1$. Si verifica facilmente che u_o é soluzione debole, e quindi classica, dell'equazione di Poisson semilineare

$$\Delta u_o + f(u_o) = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^{2n}.$$

Inoltre $u_o(z) = U_o(r)$ con $r = |z|$ per qualche funzione U_o soluzione di

$$U_o''(r) + \frac{2n-1}{r} U_o'(r) + f(U_o(r)) = 0, \tag{2.11}$$

$$U_o'(0) = 0 \tag{2.12}$$

Ora, il problema di Cauchy per (2.11) con condizioni iniziali $U_o(0) = 1$ e $U_o'(0) = 0$ ha un'unica soluzione (si veda, ad es. [13]). Allora, poiché $f(1) = 0$, se fosse $U_o(0) = 1$ si avrebbe $U_o \equiv 1$ e la dimostrazione sarebbe conclusa. Supponiamo per assurdo che sia $U_o(0) < 1$. Deve allora essere $U_o'(r) < 0$ per $r < 0$, in quanto, integrando (2.11) si ha:

$$r^{2n-1} U_o'(r) = -\int_0^r \rho^{2n-1} f(U_o(\rho))d\rho < 0, \tag{2.13}$$

Quindi U_o é strettamente descrescente ed ha limite finito e non negativo per $r \to \infty$. Piú precisamente, $\lim_{r\to+\infty} U_o(r) = 0$. Infatti, in caso contrario, $U_o(r) \to k > 0$ e $f(U_o(r)) \to f(k) > 0$ (per (H3)). Questo, insieme con (2.13), implicherebbe $|U_o'(r)| \to \infty$, che é assurdo perché U_o é limitata. Ora, per l'ipotesi (H4) su f, U_o verifica

$$U_o''(r) + \frac{2n-1}{r} U_o'(r) + K(r)U_o(r) = 0$$

con $K(r) = \frac{f(U_o(r))}{U_o(r)} \to l > 0$.

Allora, posto $V_o(r) = r^{\frac{2n-1}{2}} U_o(r)$, risulta

$$V_o''(r) + H(r)V_o(r) = 0$$

con

$$H(r) = \frac{2n-1}{2}(1 - \frac{N-1}{2})\frac{1}{r^2} + K(r).$$

Confrontando questa equazione con

$$W''(r) + \frac{l}{2}W(r) = 0,$$

dai classici teoremi di separazione degli zeri di Sturm-Liouville, otteniamo che V_o, e quindi U_o, ha infiniti zeri in un intorno di infinito. Questo evidentemente é assurdo perché U_o é strettamente positiva. Con questo la dimostrazione é completa.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio, X. Cabré, Entire solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^3$ and a conjecture of De Giorgi, In stampa su *J. Amer. Math. Soc.*

[2] M.T. Barlow, R. F. Bass, C. Gui, The Liouville property and a conjecture of De Giorgi, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 8, 1007–1038.

[3] H. Berestycki, F. Hamel, R. Monneau, One-dimensional symmetry of bounded entire solutions of some elliptic equations, *Duke Math. J.* **103** (2000), no. 3, 375–396.

[4] I. Birindelli, E. Lanconelli, A note on one dimensional symmetry in Carnot Groups, In stampa su *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei.*

[5] I. Birindelli, J. Prajapat, Nonlinear Liouville theorems in the Heisenberg group via the moving plane method *Comm. Partial Differential Equations* **24** (1999) 1875–1890.

[6] I. Birindelli, J. Prajapat, One dimensional symmetry in the Heisenberg group, to appear in *Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa.*

[7] I. Birindelli, J. Prajapat, Monotonicity results for Nilpotent Stratified Groups, In stampa su *Pacific J. of Math.*

[8] L.Caffarelli, N.Garofalo, F.Segala, A gradient bound for entire solutions of quasilinear equations and its consequences, Comm. Pure Appl. Math. 47(1994), 1457-1473 .

[9] E.De Giorgi, Convergence problems for functionals and operators, Proc. Int. Meeting: Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome), 1978, 131-188

[10] A. Farina, Symmetry for solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ and related conjectures, *Ricerche di Matematica* **XLVIII**, (1999), 129-154.

[11] N. Ghoussoub, C. Gui, On a conjecture of De Giorgi and some related problems, *Math. Ann.*, **311** (1998), 481-491.

[12] L. Modica, A gradient bound and a Liouville Theorem for non linear Poisson equations, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985),679-684.

[13] L.A. Peletier, J. Serrin, Uniqueness of positive solution to semilinear equations in $\mathbb{R}^n$, J. Differential Equations, **61** (1986), 380-397.